1. Matrizen & Vektoren: (Satz 2.2):

$(-A_{ij}) = -(A_{ij})$ $A+0=0+A=A$ $A+(-A)=(-A)+A=0$

$A+X=B \rightarrow (X)_{ij} = (B)_{ij} - (A)_{ij}$

Satz 2.1:

$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$

$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ $A+B=B+A$

$(A+B)+C = A+(B+C)$ $(AB)C = A(BC)$ $(A+B)C = AC+BC$

$A(B+C) = AB+AC$ $AB \neq BA$ (in der Regel)

Satz 2.3: $Ax = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ $Ae_j = a_j$

Satz 2.4: $AB = (Ab_1 \mid Ab_2 \mid Ab_3 \mid \dots \mid Ab_p)$

Satz 2.5: $Ax=b$ hat Lösung, falls $b = LK$ der Kolonen v. A

Satz 2.6 (Falls $\mathbb{R} \rightarrow T$)

$(A^H)^H = A$ $(\alpha A)^H = \bar{\alpha}A^H$ $(A+B)^H = A^H + B^H$ $(AB)^H = B^H A^H$

Satz 2.7: $AB = BA \Leftrightarrow AB$ Symetrisch A^HA, AA^H immer symetrisch

Cos-Satz: $\cos\varphi = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y-x\|^2}{2\|x\|\|y\|} = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$ $\langle x,y\rangle = 0 \rightarrow x \perp y$

Eukld. Skalarprodukt: $\langle x,y\rangle := x^H y = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k y_k$

Satz 2.9: Skalarprodukt (Inneres Produkt)

(S1) $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$ (linear im 2. Faktor)

$\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$

(S2) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ (falls $\mathbb{R}$: $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$) symetrisch

(S3) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \rightarrow x=0$ $\forall x$

Zu Satz 2.7: A Symetrisch $\Leftrightarrow A = A^T \Rightarrow A$ quadratisch

$A^H = (\bar{A})^T = \bar{A}^T$ Hermitesch (komplex konjugiert-transponiert)

A Hermitesch $\Leftrightarrow A = A^H$ (Diag Elemente $\in \mathbb{R}$!)

A Schief-Symetrisch: $A^T = A^{-1}$ (Diag Elem = 0!)

Zu Satz 2.6 Generell $(AB)^T = B^TA^T = BA \neq AB$, für A,B symetr.

Beweis 2.7: $(A^TA)^T \underset{(iv)}{=} A^T(A^T)^T \underset{(i)}{=} A^TA \Rightarrow A^TA$ Symetrisch.

Skalarprod: $\langle x,y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 = x^Ty$

Eukl. Länge: $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$z = y - x$ $\|z\|^2 = \|y\|^2 - 2\langle y,x\rangle + \|x\|^2$

$\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\alpha = \|z\|^2$ $\alpha = 90° \Rightarrow \cos\alpha = 0$

Beweis Satz 2.9: (S1): $\langle x, y+z\rangle \underset{def}{=} x^H(y+z) \underset{distr.}{=} x^Hy + x^Hz \underset{def}{=} \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

x^Hy ist Skalar $\langle x, \alpha y\rangle = x^H(\alpha y) = \alpha(x^Hy) = \alpha\langle x,y\rangle$

(S2) $\langle x,y\rangle = x^Hy = (x^Hy)^T = y^T(x^H)^T = \overline{y^H(\bar{x}^T)^T} = \overline{y^Hx} = \overline{y^Hx} = \overline{\langle y,x\rangle}$

(S3) $\langle x,x\rangle = x^Hx = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geq 0$

Kor 2.10: $\left.\begin{array}{l}\langle w+x, y\rangle = \langle w,y\rangle + \langle x,y\rangle \\ \langle \alpha x, y\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle\end{array}\right\}$ (S4)

Satz 2.11: CS-Ungleichung: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

↳ = falls y ein vielfaches von x. **Beweis** $x,y \in \mathbb{E}^n$, $\alpha \in \mathbb{E}$

$0 \underset{(S3)}{\leq} \langle \alpha x+y, \alpha x+y\rangle = \langle \alpha x, \alpha x+y\rangle + \langle y, \alpha x+y\rangle = \alpha\bar{\alpha}\langle x,x\rangle +$

$\bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$ für $x=0$, gilt S. 2.11 mit "="

$x \neq 0 \rightarrow \alpha = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$ $\rightarrow$ multi. mit $\langle x,x\rangle \rightarrow 0 \leq |\langle x,y\rangle|^2 -$

$|\langle x,y\rangle|^2 - |\langle x,y\rangle|^2 + \langle y,y\rangle\langle x,x\rangle \rightarrow 0 \leq -|\langle x,y\rangle|^2 + \|y\|^2\|x\|^2$

LGS:

$m \times n$: falls $m=n \rightarrow$ genau eine Lösung, ausser Zeilen linear abhängig, (falls nur Zeilen v. A, nicht b, keine Lös.)

$m > n$: keine Lösung, ausser Linear abhängige Zeilen

$m < n$: unendliche Lösungsschar (es gibt Ausnahmen)

Verträglichkeitsbedingung: z.B. $b_3 - b_2 - b_1 = 0$

Rang $A = r \leq \min\{m,n\}$, anzahl Pivots in ZSF

Freie Parameter: $n - r \geq 0$, $m - r \geq 0$ Verträglichkeitsbed.

Satz 1.1

System hat min. 1 Lösung: $r = m$ oder $r < m$ und $c_{r+1} = \dots = 0$ (Verträglichkeitsbedingung)

Gibt es Lös. $r = n \rightarrow$ Lösung eindeutig, $r < n \rightarrow (n-r)$-parametrige Lösungsschar

Korollar 1.1 äquivalent:

(i) $Ax=b$ genau 1 Lsg. $\Leftrightarrow r = n = m$ oder $r = n < m$ und $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$

(ii) $Ax=b$ hat für jedes b min. eine Lsg. $\Leftrightarrow r = m$

(iii) $Ax=b$ hat für jedes b genau eine Lsg. $\Leftrightarrow r = m = n \rightarrow$ Kor 1.4

Kor 1.4: Die Lösung eines $n \times n$ LGS eindeutig = System für jedes b lsg.

HLGS: $Ax = 0$ heisst homogen, triviale Lsg: $x = 0$

falls $n > m \rightarrow$ nicht triviale Lösungen

Kor 1.5 ↘ bzw. $r < n$

Kor 1.6 $n \times n$ LGS für bel. b lösbar, wenn HLGS nur triviale Lösg.

Kor 1.7 $n \times n$ LGS: entweder i–iv oder v–ix:

(i) r = Rang $A = n$ (A ist Regulär) (iv) das entsprechende HLGS $b=0$ hat nur triviale Lsg.

(ii) jedes b hat min. 1 Lsg. (iii) jedes b hat genau 1 Lsg.

(v) r = Rang $A < n$ (A ist singulär) (vi) für gewisse b keine Lösung.

(vii) für kein b gibt es eindeutige Lsg. (viii) für gewisse b ∞ Lösungen

(ix) das zugehörige HLGS hat nicht triviale Lösungen.

Satz 2.12: 2-Norm in $\mathbb{E}^n$

(N1) positiv definit: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \rightarrow x = 0$

(N2) Betrag homogen $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

(N3) Dreiecksungleichung $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

N3: $\|x \pm y\|^2 = \langle x\pm y, x \pm y\rangle = \langle x,y\rangle \pm 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$

$\|x \pm y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

$\underset{CS}{\leq}$ $2\langle x,y\rangle \leq 2\|x\|\|y\|$

Winkel in $\mathbb{E}^n$

$y - x = z$ $\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y-x\|^2 = 2\|x\|\|y\|\cos\theta$

$= 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$

$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \rightarrow \theta = \arccos\frac{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$

x, y Orthogonal: $x \perp y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$

z.B. $x = (1\ 1\ -1\ 2\ 3)$ $y = (1\ 0\ 0\ 1\ -1)$, $\langle x,y\rangle = 0$

Satz 2.13: Satz v. Pythagoras: $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ falls $x \perp y$

Beweis: $\|x \pm y\|^2 = \langle x\pm y, x\pm y\rangle = \langle x,x\rangle \pm \langle x,y\rangle \pm \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle =$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2$, da $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} = 0$

Def: Norm:

pwacker	15-937-717	1

in $\mathbb{E}^n$ ordnet eine Zahl aus $\mathbb{R}$ zu mit:

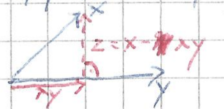
Satz 2.12 (N1), (N2), (N3)

z.B. 2-Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$

Orthogonale Projektion auf Gerade (äusseres Produkt)

x, y Vektoren, $y \neq 0$ Wir suchen λy, s.d.

$z = x - \lambda y$ und $z \perp y$



$0 = \langle y, z\rangle = \langle y, x - \lambda y\rangle =$

$= \langle y,x\rangle - \lambda\langle y,y\rangle \Rightarrow \lambda\langle y,y\rangle = \langle y,x\rangle$

$\Rightarrow \lambda = \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle} = \frac{y^Hx}{\|y\|} = \lambda = \frac{y^Hx}{\|y\|}$

$\Rightarrow \lambda y = y\lambda = \frac{yy^Hx}{\|y\|}$

$P_yx = \lambda y = y\lambda = \frac{yy^Hx}{\|y\|^2} = uu^Hx$, $u = \frac{y}{\|y\|}$

P_yx = Orthogonale Projektion

Dyadisches (äussere Produkt)

$x_{m\times 1}\, y_{n\times 1}$ ist $(xy^H)_{m\times n}$

Innere Produkt $\langle x,y\rangle = x^Hy \rightarrow$ Zahl

Äussere Produkt: $xy^H \rightarrow$ Matrix

Projektionsmatrix: $P_y = \frac{yy^H}{\|y\|^2}$ z.B. $P_yx = \frac{yy^Hx}{\|y\|^2}$

↳ 1) $P_y^H = P_y$ 2) $P_y^2 = P_y$ (idempotent)

↳ $\lambda y = P_yx$, $P_yP_yx = P_yx = P_y^2x$

Satz 2.14 $m \times n$ Matrix hat Rang genau wenn sie äusseres Produkt von $x_{m\times 1} \neq 0$ und $y_{n\times 1} \neq 0$ ist!

Matrizen & Lineare Abbildungen:

$A \in \mathbb{E}^{m\times n}$ ebenfalls A: Abbildung.

$A: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^m$

$x_{n\times 1} \longrightarrow (Ax)_{m\times 1}$ $(A_{m\times n} \cdot x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$

1) $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{E}^n: A(x+\tilde{x}) = Ax + A\tilde{x}$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{E}$ $A(\alpha x) = \alpha(Ax)$

$$\begin{array}{ccc} A: \mathbb{E}^n & \longrightarrow & \mathbb{E}^m \\ x, \tilde{x} & \xrightarrow{A} & Ax, A\tilde{x} \\ \downarrow + & & \downarrow + \\ x+\tilde{x} & \xrightarrow{A} & A(x+\tilde{x}) = Ax + A\tilde{x} \\ A: \mathbb{E}^n & \longrightarrow & \mathbb{E}^m \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} A: \mathbb{E}^n & \longrightarrow & \mathbb{E}^m \\ x & \longrightarrow & Ax \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ \alpha x & \longrightarrow & A(\alpha x) = \alpha(Ax) \\ A: \mathbb{E}^n & \longrightarrow & \mathbb{E}^m \end{array}$$

$A(x+\tilde{x}) = Ax + A\tilde{x}$ $A(\alpha x) = \alpha(Ax)$

Bsp: P_y: $\mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, $x \mapsto P_yx$; $\mathrm{Im}\,P_y = \{\alpha y\}$

Falls 1) und 2) für $x, \tilde{x} \in \mathbb{E}^n$ und $\forall \alpha \in \mathbb{E}$, dann Abbildung A: linear.

Definitions Bereich: $A: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^m$ ist $\mathbb{E}^n$

Bild ist $\mathrm{Im}(A) = \{Ax \in \mathbb{E}^m \mid x \in \mathbb{E}^n\} \subseteq \mathbb{E}^m$

$0 \in \mathbb{E}^m$ immer $\in \mathrm{Im}(A)$, da $A \cdot 0 = 0$

Inverse einer Matrix (nur $n\times n$!)

$AX=I_n=XA$: nur für quadratische, nicht immer möglich. z.B. $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}x_{11}+x_{21}&x_{12}+x_{22}\\0&0\end{pmatrix}$

Falls A invertierbar: $AA^{-1}=I_n=A^{-1}A$, Falls A nicht invertierbar, dann A singulär. z.B. $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

Im Normalfall: $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ A invertierbar $\Leftrightarrow ad-bc\neq 0$

$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ Satz 2.16

Inverse eindeutig: $X=XI=X(AY)=(XA)Y=IY=Y$

Satz 2.17 Es gilt äquivalent: für $A\in E^{n\times n}$ Rang $A=n$

(i) A ist invertierbar (ii) $\exists X: AX=I$ (iii) X eindeutig (iv) A regulär

Beweis: (i) ⇒ (ii) ⇒ (iv) ⇒ (iii) ⇒ (i) es gelte (i): A invertierbar $\to \exists X;\ AX=I=XA$, → (ii) mit $X=A^{-1} \to x=(A^{-1}b) \to$

$Ax=A(A^{-1}b)=(AA^{-1})b=Ib=b \overset{\text{Kor 1.7}}{\Rightarrow}$ Rang $A=n \to \dots$

Satz 2.18: A,B regulär $n\times n$ Matrix:

(i) A^{-1} regulär, $(A^{-1})^{-1}=A$ (ii) AB regulär $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(iii) $(A^H)^{-1}=(A^{-1})^H$ Beweis (ii) $AA^{-1}=I=A^{-1}A$:

$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$

Satz 2.19. Falls A $n\times n$ regulär, dann $Ax=b$ eindeutig

$x=A^{-1}b$: A regulär $\to \exists A^{-1}$ s.d. $AA^{-1}=I=A^{-1}A$

$A^{-1}Ax=A^{-1}b \Rightarrow Ix=A^{-1}b \Rightarrow x=A^{-1}b$ □

A^{-1} per Gauss: $(A|I)=\left(\begin{smallmatrix}a_{11}&\cdots\\ \vdots&a_{nn}\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}x&x\\x&x\end{smallmatrix}\right):(I|A^{-1})$

A regulär ⇔ A invertierbar ⇔ $Ax=0$ hat nur triviale Lsg.

Orthogonal & Unitär: ($n\times n$-Matrix)

Unitär: $A^HA=I_n$ Orthogonal: $A^TA=I_n$

Satz 2.20: (i) A regulär und $A^{-1}=A^H$ (bzw. $A^{-1}=A^T$)

(ii) $AA^H=I_n$ (bzw. $AA^T=I_n$) (iii) A^{-1} ist unitär (bzw. orthogonal)

(iv) AB ist unitär (bzw. orthogonal)

Rotation z.B. in $\mathbb{R}^2$ $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ um Winkel α

$R_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$ $R_\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$, $R_\alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$

$R^T(\alpha)=R(-\alpha)$ in $\mathbb{R}^3$:

$R_x(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0\\0&R_\alpha\end{pmatrix}$ $R_y(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos&&\sin\\&1&\\-\sin&&\cos\end{pmatrix}$ $R_z(\alpha)=\begin{pmatrix}R_\alpha&0\\0&1\end{pmatrix}$

R_{ij} drehung in aufgesp. Ebene. z.B. $U_{1,3}(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos&0&\sin&0&0\\0&1&0&0&0\\-\sin&0&\cos&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$U_{1,3}^{-1}(\alpha)=U_{1,3}(-\alpha)$ $U_{1,3}^T(\alpha)U_{1,3}(\alpha)=I_5$

Permutationsmatrix P quadratisch.

Pro Zeile/Spalte 1× 1, rest 0 $P^TP=I_n$, $P^{-1}=P^T$

Satz 2.21: Durch orthogonale oder unitäre $n\times n$ Matrix A definierte Abbildung ist längentreu (isometrisch) und winkeltreu $\|Ax\|=\|x\|$ (längentreu), $\langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle$ (winkeltreu).

$\langle Ax,Ay\rangle=(Ax)^HAy=x^HA^HAy=x^Hy=\langle x,y\rangle$

$x=y$: $\|Ax\|^2=\|x\|^2$

Satz: Permutation

(I) Vertauschen zweier Zeilen: $P_{ij}=\begin{pmatrix}1&&\\&0\,1&\\&1\,0&\end{pmatrix}$

(II) Addition von x fachen anderer Zeile: $E_{ij}(x)=\begin{pmatrix}1&&x\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

(III) Multiplikation einer Konstanten $\lambda\neq0$: $S_i(\lambda)=\begin{pmatrix}1&&0\\&\lambda&\\0&&1\end{pmatrix}$

↳ $E_2A=A_2$ $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $P_{12}A=A_2$: $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$

2. LR-Zerlegung: $PA=LR \to Ax=b=LRx=b$

$Rx=y$, $Ly=b$

Falls A $m\times n$, dann L invertierbar $m\times m$, R $m\times n$ in ZSF. Falls A $n\times n$, dann R invertierbar ⇔ $A=LR$ invertierbar. Falls Zeilenvertauschungen nötig sind, diese in P machen. Pivot-Strategie: grösstes Pivot wählen um Rundungsfehler zu verhindern

$P_2P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=P \to A$

Satz 3.1: $PA=LR$, $Lc=Pb$, $Rx=c$ A $n\times n$

Satz 3.3: $PA=LR$, $Lc=Pb$, $Rx=c$ A $m\times n$

3. Vektorräume (VR)

VR: V über E ist eine nicht leere Menge mit Addition $x,y\in V\mapsto x+y\in V$ und Skalarer Multiplikat. $\alpha\in E, x\in V\mapsto \alpha x\in V$ mit Axiomen:

(V1) $x+y=y+x$, (V2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (V3) $\exists 0\ x+0=x=0+x$

(V4) $\exists y: x+y=0,\ y=-x$ (V5) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

(V6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (V7) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ (V8) $1x=x$

Beispiel VR: $V=\mathbb{R}^n$ $x+y:=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}$ $\alpha y=\begin{pmatrix}\alpha y_1\\ \vdots\\ \alpha y_n\end{pmatrix}$

VR $V=\mathbb{R}^{m\times n}$ $A+B=C$, $C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$ $\alpha A=(\alpha a_{ij})$

VR $V=F(S,E)$ $(f+g)(s)=f(s)+g(s)$ $(\alpha f)(s)=\alpha f(s)$

$+: V\times V\to V$, $(x,y)\to x+y$ $\cdot: E\times V\to V$, $(\alpha,x)\to\alpha x$

$A\times B:=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$

VR $V=P_m$ (Menge Polynome grad $\leq m$)

$P_m=\{p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\dots+a_mt^m \mid a_i\in\mathbb{R}\}$

↳ $0=a_i\in\{0\}$, $p(t)=a_i\in\{-\infty,\dots,-1,0\}$

Satz 4.1: V ist VR über E

(i) $y+x=x\Rightarrow y=0$ (ii) $0x=0$ (iii) $\alpha 0=0$

(iv) $\alpha x=0\Rightarrow \alpha=0 \vee x=0$ (v) $(-\alpha)x=\alpha(-x)=-(\alpha x)$

Beweis (i): $\exists -x\in V$ (nach V4) s.d. $x+(-x)=0$

$y+x=x \Rightarrow (y+x)+(-x)=x+(-x)\overset{V2}{=}y+(x+(-x))=x+(-x)=y+0=y=0$

$\overset{V3}{=}y+0=0\Rightarrow y=0$

(ii) $0=0+0\in E\to(0+0)x=0x\overset{V6}{=}0x+0x=0x\overset{\text{nach (i)}}{\Rightarrow}0x=0$

(iii) $\alpha0=0$: $\alpha0+\alpha0=\alpha(0+0)=\alpha0\overset{\text{nach (i)}}{\Rightarrow}\alpha0=0$

Satz 4.2: zu x,y $\exists z$ mit $x+z=y$, z eindeutig

$z=y+(-x)$: Bew: nach (V4) $\exists -x$ s.d. $x+(-x)=0$

$x+z=x+(y+(-x))\overset{A2}{=}(x+y)+(-x)\overset{A1}{=}(y+x)+(-x)\overset{A2}{=}y+(x+(-x))=$

$y+0=y$ Subtraktion: $x-y:=x+(-y)$

Körper: Ein VR kann über beliebigen Körper gebildet

(K1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (K2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (K3) $\exists0: \alpha+0=\alpha$

(K4) $\exists-\alpha: \alpha+(-\alpha)=0$ (K5)–(K8) für mult. $0\neq1$

(K9) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ (K10) $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$

Unterräume & Erzeugungssysteme:

Bsp. $V=\mathbb{R}^4$ $U\subset V$ $U=\{x=(a\ b\ a\ b)^T \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

$x+y=(a+\tilde a\ \ b+\tilde b\ \ a+\tilde a\ \ b+\tilde b)^T \checkmark$ $\alpha x=(\alpha a\ \alpha b\ \alpha a\ \alpha b)^T \checkmark$

Muss nicht immer: $V=\mathbb{R}^2$ $U=\{\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha^2\end{pmatrix} \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$

$x=\begin{pmatrix}a\\a^2\end{pmatrix}$ $y=\begin{pmatrix}b\\b^2\end{pmatrix}$ $x+y=\begin{pmatrix}a+b\\a^2+b^2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}a+b\\(a+b)^2\end{pmatrix}\Rightarrow x+y\notin U$ ↯

Satz 4.3: Ein $U\subset V$ ist selbst VR. Es gelten automatisch: (V1), (V2), (V5)–(V8)

Bmk: trivialer Unterraum: $U=\{0\}$

$U=\{\begin{pmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{pmatrix}\}$ ist UR von $\mathbb{R}^{2\times2}$

$V=P_n$, $U=P_m$, falls $m<n$ ist U UR v. V

Satz 4.4:

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $L_0=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}\subset\mathbb{R}^n\to L_0$ UR v $\mathbb{R}^n$

Beweis: $A(x+y)=Ax+Ay=0=0+0\Rightarrow x+y\in L_0$

$A(\alpha x)=\alpha Ax=\alpha\cdot0=0\Rightarrow\alpha x\in L_0$

$L_b=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=b\}$ $b\neq0$ kein UR $\to x+y\to b+b\neq b$ ↯

Bsp. $A=(1\ 1\ 1)\in\mathbb{R}^{1\times3}$ $U=\{x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mid x_1+x_2+x_3=0\}$

$=\{x=\begin{pmatrix}-x_2-x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mid x_2,x_3\in\mathbb{R}\}=\{\begin{pmatrix}-x_2\\x_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x_3\\0\\x_3\end{pmatrix} \mid \dots\}=\{x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\}\dots$

U ist Menge aller LK von $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ U_i ist UR

↳ $U_1=\{x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\}$, $U_2=\{x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \mid x_3\in\mathbb{R}\}$, $U=U_1+U_2$ $(U=\sum U_i)$

Linearkombination:

$x=\gamma_1a_1+\dots+\gamma_la_l=\sum_{i=1}^{l}\gamma_ia_i$ mit $\gamma_1\dots\gamma_l$ ist LK

Alle LK von $a_1\dots a_l$ sind UR

↳ von $a_1\dots a_l$ aufgespannter UR

$\mathrm{span}\{a_1,\dots,a_l\}=\{\sum\gamma_ia_i \mid \gamma_1\dots\gamma_l\in E\}$

$x\in\mathrm{span}\{a_1,\dots,a_l\}\Rightarrow\exists\gamma_1,\dots,\gamma_l\in E$ s.d. $\sum\gamma_ia_i=x$

Die Vektoren $a_1,\dots,a_l$ heissen Erzeugungssystem von $\mathrm{span}\{a_1,\dots,a_l\}$

Bsp: $m+1$ monome $1,x,x^2,\dots,x^m$ für P_m

↳ Unendlich viele monome: $S=\{1,x,x^2,\dots\}$ bilden Erz. Sys von UR $P=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}P_m$ → jedes Polynom kann als LK endlicher Monome $(1,\dots,x^k)$ geschrieben werden.

Erzeugungssysteme & LK (Fortsetzung)

Bsp. $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$

$a_1, \dots, a_k$ ist ein Erz. Syst. von $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ jedes $b \in \mathbb{R}^n$ ist LK $a_1 \dots a_k$

$\Leftrightarrow$ für jedes $b\ \exists \beta_i \in \mathbb{R} \to b = \sum_i \beta_i a_i \Leftrightarrow$ für jedes b hat $Ax = b$ eine Lösung $\overset{\text{Kor 1.1}}{\Leftrightarrow}$ Rang $A = n$

Bsp. $P_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{1, x, x^2\}$

aber auch $\text{span}\{1, x, x^2+x\}$ da $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_0 + (a_1 - a_2)x + a_2(x^2+x)$

$= \text{span}\{1, x, x^2+x, 2x\} = \text{span}\{1, x, x^2, x^2+x\}$, usw.

$\Rightarrow$ Erzeugungssystem nicht eindeutig.

Lineare Abhängigkeit, Basen & Dimension

Vektoren $a_1 \dots a_l \in V$ sind lin. abhängig, falls $\exists \gamma_1 \dots \gamma_l$ die nicht alle 0 sind, das gilt $\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_l a_l = 0 = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i a_i$

ansonsten, falls $\gamma_1 = \dots = \gamma_l = 0$ lin. unabhängig.

Bsp. $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}^n$, lin unabhängig: $\Leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_l a_l = 0$ hat nur triviale Lösung $x_1 = \dots = x_l = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$ hat nur triviale Lösung $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} = 0$ nur triviale Lösung

Bsp. $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = x + x^2, P_3(x) = x^2 \to$ lin abhängig. $P_2 = P_3 + P_1$

Lemma 4.5: Die $l \geq 2$ Vektoren $a_1 \dots a_l$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow$ Einer dieser a lässt sich als LK der anderen schreiben $\Leftrightarrow \exists \alpha_i \in \mathbb{R}$ s.d. $a_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{l} \alpha_i a_i$

Beweis: ($\Rightarrow$) $a_1, \dots, a_l$ lin. abhängig $\Rightarrow \exists \gamma_1 \dots \gamma_l \in E: \sum \gamma_i a_i = 0$ und min $1\ \gamma_k \neq 0$ für $1 \leq k \leq l \Rightarrow a_k = \sum -\gamma_i a_i / \gamma_k$

$\Rightarrow a_k$ ist LK aus $\{a_1, \dots a_l\}$

($\Leftarrow$) a_k ist LK aus $\{a_1, \dots, a_l\} \Rightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_l \in E$ s.d. $a_k = \sum_{j=1, j \neq k}^{l} \alpha_j a_j$

$\Rightarrow 1 \cdot a_k - \alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_l a_l = 0 \Rightarrow a_1 \dots a_l$ sind lin. abhängig

z.B. $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = \sin^2 t$, $f_3(t) = \cos 2t \to$ lin abhängig $f_3 = f_1 - f_2$

Verallgemeinerung: Unendliche Menge S: lin unabhängig, falls jede endliche Teilmenge $T \subset S$ lin. unabhängig ist.

z.B. $\{1, t, t^2\} = P_2 \subset P \to$ lin unabhängig

Basis:

Ein lin. unabhängiges Erz. Syst. heisst Basis. $B = \{b_1 \dots b_n\} \subset V$

1) Erzeugend, $\text{span}\{b_1, \dots b_n\} = V$ 2) lin. unabhängig.

Bsp. $V = \mathbb{R}^n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist Basis.

1) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots \Rightarrow \{e_1 \dots e_n\}$ erzeugend

2) $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = 0 \Rightarrow x_i = 0\ \forall_i \Rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ lin unabhängig

Bsp. $\mathbb{R}^{2 \times 2}$: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ Basis.

Bsp. $V = \mathbb{R}^n$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $r = \text{Rang}\,A$

$a_1 \dots a_k$ ist erzeugend	$Ax = b$ ist für jedes b lösbar	$r = n$
$a_1 \dots a_k$ ist lin. unabhängig	$Ax = 0$ hat nur triviale Lösung	$r = k$
$a_1 \dots a_k$ ist Basis	$Ax = b$ für jedes b eindeutig lösbar, A ist regulär	$r = n = k$
$a_1 \dots a_k$ ist lin. abhängig	$Ax = 0$ hat nicht triviale Lösungen	$r < k$

Bsp. $(1\ 0\ 0)^T\ (1\ 2\ 0)^T\ (1\ 1\ 3)^T$ bilden Basis

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist regulär $\to$ 1 lin unabhängig und 2 alles bildbar

Bsp. $(1 1 0)^T\ (1 0 1)^T\ (0 1 0)^T\ (1 1 1)^T$ ist keine Basis

↳ Erzeugend aber nicht lin. unabhängig.

Bsp. $(1 1 0)^T\ (1 0 1)^T$ keine Basis, da lin unabhängig aber nicht erzeugend, z.B. $(0\ 0\ 1)^T = (a+b\ \ a\ \ b)^T \Rightarrow \begin{smallmatrix} b=1 \\ a=0 \end{smallmatrix}\ a+b=0$ ↯

Lemma 4.6: Jedes Erz. Sys. in einem endlich dim. VR lässt sich zu einer Basis reduzieren $V \neq \{0\}$!

Satz 4.7: Jede Basis von V besitzt gleich viel Vektoren, nämlich dim von $V \to \dim V$

Lemma 4.8: Ist $\{b_1, \dots, b_l\}$ erzeugend, dann ist $\{a_1, \dots, a_m\}$ immer lin. abhängig, falls $m > l$ $\to \dim V = n$, mehr als n automatisch abhängig.

Satz 4.9: lin. unabhängige Vektoren können immer zu Basis ergänzt werden!

Korollar 4.10: Jede Menge von $n = \dim V$ lin. unabhängigen Vektoren sind Basis von $V \Leftrightarrow n$ Vektoren in $n = \dim V$ unabhängig $\Leftrightarrow$ sie sind erzeugend $\Leftrightarrow$ sie bilden Basis

Satz 4.12: $\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ ist genau dann Basis von V, wenn jedes x: $x = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k b_k$

Nach Lemma 4.8: weniger als $n = \dim V$ Vektoren in $V \to$ nicht erzeugend!

Beweis Lemma 4.6: nach L4.5: ist das Erz. nicht lin. unabhängig, kann mittels L4.5 eliminiert werden bis Basis!

↳ jedes endliche Erz. System kann zur Basis reduziert werden.

Beweis Satz 4.7 mittels L4.8 $\{a_1 \dots a_l\}, \{b_1, \dots b_m\}$ Basen in V

z.Z. $l = m$: da $\{b_1 \dots b_m\}$ erzeugend und $\{a_1, \dots a_l\}$ lin. unabhängig nach L4.8 $l \leq m$. das umgekehrt: L4.8 $m \leq l \Rightarrow l = m$

Beweis Lemma 4.8: $\{b_1, \dots b_m\}$ erz. $\Rightarrow \exists\, \tau_{ik}: a_k = \sum \tau_{ik} b_i$

wir betrachten HLGS aus m Gleichungen und l Parametern $l > m \Rightarrow$ ~~…~~ $\exists$ nicht triviale Lösung $\Rightarrow (\xi_1, \dots, \xi_l)^T \neq (0, 0, \dots, 0)^T$ Kor. 15

$\to a = \sum_k^l \xi_k a_k = \sum_k^l \xi_k \left(\sum_i^m \tau_{ik} b_i\right) = \sum_i^m \left(\underbrace{\left(\sum_k \tau_{ik} \xi_k\right)}_{=0} b_i\right) = 0$

$\Rightarrow \sum a_k \xi_k$ ist nicht triviale Darstellung v. Nullvektor als LK per Def. $\{a_1, \dots, a_l\}$ sind lin. abhängig.

Beweis Kol 4.10: Wären sie nicht Basis, könnten sie mit S4.9 ergänzt werden. dadurch wären es $>$ dim V Vektoren, was S4.7 wiederspricht! ↯

V ist VR, $n = \dim V$:

1 $> n$ Vektoren sind lin. abhängig

2 $< n$ Vektoren sind nicht erzeugend.

B = Basis in V:

↳ $x = \sum_i \xi_i b_i$, ξ_i eindeutig, da sonst $0 = x - x = \sum(\xi_i - \xi_i') b_i \Rightarrow \xi_i - \xi_i' = 0 \Rightarrow \xi_i = \xi_i'$

Satz 4.12: $\Leftrightarrow$ jeder Vektor in V lässt sich in eindeutiger Weise als LK von $b_1 \dots b_n$ darstellen

Def: ξ_i heissen Koordinaten v. x bezgl. der Basis. $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ ist der Koordinatenvektor $(\xi_1 \dots \xi_n)^T$

$K_V: V, B \to E^n$, $x \to (\xi_1 \dots \xi_n)^T = [x]_B$ K_V ist Koordinaten-Abbildung.

Sei $V = \{b_1, \dots b_l\}$, $U = \text{Span}\,M \neq V$. ~~…~~ $l < n$

nach Satz 4.9 kann U ergänzt werden $U' = \text{span}\,N$: $V = \text{span}\,b_k$ jedes x in $M \cup N$: $x = \underbrace{\sum_{k=1}^{l} \xi_k b_k}_{\in U} + \underbrace{\sum_{k=l+1}^{n} \xi_k b_k}_{\in U'}$ und $U \cap U' = 0$

U, U' = komplementär.

Basiswechsel:

$\{b_1, \dots b_n\}$ "alte" Basis $\{b_1', \dots b_n'\}$ "neue" Basis

$x = \xi_1 b_1 + \dots + \xi_n b_n = \xi_1' b_1' + \dots + \xi_n' b_n'$ $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = [x]_B$ $\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{pmatrix} = [x]_{B'}$

b_k' ist LK $b_1 \dots b_n$ $b_k' = \sum \tau_{ik} b_i$

def. $n \times n$ $T = (\tau_{ik})$ ist Transformmatrix des Basiswechsels. **Satz 4.13:** $\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \tau_{ik} \xi_k'$

$\Rightarrow \xi = T\xi'$ (T regulär) $\xi' = T^{-1}\xi$

$$\begin{array}{ccc} V, B & \longrightarrow & V, B' \\ x & \longrightarrow & x \\ K \downarrow & & \downarrow K' \\ \xi = [x]_B \in E^n & \xrightarrow{T^{-1}} & \xi' = [x]_{B'} \in E^n \end{array}$$

$\xi = T\xi'$, $\xi' = T^{-1}\xi$

$b_k' = \sum \tau_{ik} b_i$

$[x]_B = T[x]_{B'}$

$\boxed{\text{in } V = E^n \quad B' = BT}$

Bsp: $V \overset{!}{=} G_4 = \{a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 \mid a_0, a_2, a_4 \in \mathbb{R}\}$

$b = \{1, t^2, t^4\}$, $b' = \{t^2, 1+t^2, 1+t^2+t^4\}$

$g(t) \in G_4$, $g = a + bt^2 + ct^4 = a't^2 + b'(1+t^2) + c'(1+t^2+t^4)$

$[g]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $[g]_{B'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

$T = ([b_1']_B\ [b_2']_B\ [b_3']_B) = ([t^2]_B\ [1+t^2]_B\ [1+t^2+t^4]_B)$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B' = BT$

$(t^2\ \ 1+t^2\ \ 1+t^2+t^4) = BT$

Koordinaten hängen von Basis ab: $V=\mathbb{R}^2$

$B=\{\binom{1}{0},\binom{0}{1}\}$, $B'=\{\binom{1}{1}\binom{0}{1}\}$ $B''=\{\binom{1}{0}\binom{1}{1}\}$ $v=\binom{x}{y}$ $[v]_B=\binom{x}{y}$ $[v]_{B'}=\binom{x}{y-x}$

$[v]_{B''}=\binom{x-y}{y}=(x-y)b_1''+yb_2''=(x-y)\binom{1}{0}+y\binom{1}{1}$

Bsp G_4 (Seite 3 unten rechts): $g=1+2t^2+8t^4\in V$

$[g]_B=\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}=\xi\in\mathbb{R}^3$ $[g]_{B'}=\xi'=\begin{pmatrix}\xi_1'\\\xi_2'\\\xi_3'\end{pmatrix}$ $\xi=T\xi'\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}(\xi')=\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \xi'=\begin{pmatrix}1\\-7\\8\end{pmatrix}$

4. Lineare Abbildungen:

$F: V\to W$ "lineare Strukturen" erhalten:

$F: V\to W$, $v_1\to F(v_1)=w_1$, $v_2\to F(v_2)=w_2$,

(1) $v_1+v_2\to F(v_1+v_2)=F(v_1)+F(v_2)=w_1+w_2$

(2) $\alpha v_1\to F(\alpha v_1)=\alpha(F(v_1))=\alpha w_1$

V: Definitionsraum, W: Bildraum der Abbildung

$F: X\to\mathbb{E}$ F ist lineares Funktional.

$F: X$ und $Y=\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f \text{ abbildung}\}$ dann F ist linearer Operator.

$V^*:=\{F: V\to\mathbb{E}\mid F \text{ lineares Funktional}\}$: Dual Vektorraum.

Surjektiv & Injektiv:

$F(x)=Y\Rightarrow F$ surjektiv (onto) $\forall y\in Y, \exists x\in X: F(x)=y$

$F(x)=F(x')\Rightarrow x=x'$: F injektiv (one-to-one) $\forall y\ \exists$ höchstens $1x: F(x)=y$

$F(x)$ bijektiv = injektiv & surjektiv $\forall y\ \exists! x$ (eindeutig) $F(x)=y$

bsp. $F(x)=\sin x$: nicht surjektiv, nicht injektiv $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

bsp $F:\mathbb{R}\to[-1,1]$ $F(x)=\sin x$ surjektiv, nicht injektiv

bsp $F:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$, $F(x)=\sin x$: bijektiv.

URbild:

$F^{-1}(Z)=(x\in X\mid F(x)\in Z\}$ bsp $F(x)=\sin x$:

$F^{-1}([3,4])=\emptyset$, $F^{-1}([-1,1])=\mathbb{R}$, $F^{-1}([0,1])=[-2\pi,-\pi]\cup\ldots$

Satz: Lineare Abbildung:

Jede Lineare Abbildung, $F: X^{(n)}\to Y^{(m)}$ lässt sich durch $m\times n$ Matrix A darstellen. Basen: $B=\{b_1\ldots b_n\}$ in X, $C=\{c_1\ldots c_m\}$ in Y

$[x]_B=(\xi_1\ldots\xi_n)^T$, $[y]_C=(\eta_1\ldots\eta_m)^T$ koordinatenvektoren von x und $y=F(x)$ bezgl. B resp. C: $[y]_C=A[x]_B$, $A=([Fb_1]_C\ldots[Fb_n]_C)$

$$\begin{array}{ccc} F: X,B & \longrightarrow & Y,C \\ x & \longrightarrow & F(x)=y \\ \downarrow K_X & & \downarrow K_Y \\ [x]_B\in\mathbb{E}^n & \xrightarrow{A} & [y]_C\in\mathbb{E}^m \end{array}$$

$[y]_C=A[x]_B$ $A=([Fb_1]_C\ldots[Fb_n]_C)$

Bsp. $X,Y=\mathbb{P}_2$ $D: X\to Y$
$p(x)=a+bx+cx^2\to b+2cx$

$D(1)=0$
$D(x)=1$
$D(x^2)=2x$

$A=[D]_{B,C}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ $B=\{1,x,x^2\}=C$
$C'=\{1,x+1,x^2\}$

$A=[D]_{B,C'}\begin{pmatrix}0&1&-2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

K_X ist bijektiv $\Leftrightarrow\exists K_X^{-1}$: Koordinaten abbildung
$\Leftrightarrow K_X$ ist Isomorphismus ($X=Y\Rightarrow$ Automorphismus)

Lemma 5.1: ist $F: X\to Y$ Isomorph, so ist $F^{-1}: Y\to X$ linear und auch ein Isomorphismus.

Lemma 5.2: Wird F bzgl. festen Basen durch A dargestellt so ist A regulär und F^{-1} wird als A^{-1} dargestellt.

Lemma 5.3: X,Y,Z VR über $\mathbb{E}$, $F: X\to Y$, $G: Y\to Z$ linear, dann $G\circ F: X\to Z$ linear, sind A und B Abbildungsmatrizen zu F und G, bzgl. festen Basen so hat $G\circ F$ Abb. M: BA

$$\begin{tikzcd}
x\in X \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "G\circ F"] \arrow[d, shift right, "K_X"'] & y\in Y \arrow[r, "G"] \arrow[d, shift right, "K_Y"'] & z\in Z \arrow[r, "id_Z"] \arrow[d, shift right, "K_Z"'] & z\in Z, C' \arrow[d, "K_Z'"] \\
{[x]_B=\xi\in\mathbb{E}^n} \arrow[u, shift right, "K_X^{-1}"'] \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "BA"'] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & \eta\in\mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "K_Y^{-1}"'] \arrow[r, "B"] & \zeta\in\mathbb{E}^p=[z]_C=[G\circ F(x)]_C \arrow[u, shift right, "K_Z^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "S^{-1}"'] & \\
{[x]_{B'}=\xi'\in\mathbb{E}^n} \arrow[u, shift right, "T"'] & & \zeta\in\mathbb{E}^p=[z]_{C'} \arrow[u, shift right, "S"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x\in X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "K_X"'] & y\in Y \arrow[d, shift right, "K_Y"'] \\
\xi\in\mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "K_X^{-1}"'] \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & \eta\in\mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "K_Y^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "S^{-1}"'] \\
\xi'\in\mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "T"'] \arrow[r, "B"] & \eta'\in\mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "S"']
\end{tikzcd}$$

$B=S^{-1}AT$

$A=SBT^{-1}$

$A\to B=T^{-1}AT$ heißt Ähnlichkeits-Transformation

Bsp. $D:\mathbb{P}_2\to\mathbb{P}_2$ $a+bt+ct^2\to b+2ct$; $B=C=\{1,t,t^2\}=B'$

$C'=\{1,1+t,t^2\}$ $[Dp]_C=A[P]_B$, $[DP]_{C'}=A'[P]_{B'}=A'[P]_B$

$A=[D]_{B,C}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ $A'[D]_{B,C'}=\begin{pmatrix}0&1&-2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ Basiswechsel C nach C'

$$\begin{tikzcd}
X=\mathbb{P}_2 \arrow[r, "D"] \arrow[d, "K_X"] & \mathbb{P}_2=Y \arrow[d, "K_Y"] \\
{[p]_B=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{E}^3} \arrow[r, "A"] & {[Dp]_C=\begin{pmatrix}b\\2c\\0\end{pmatrix}} \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] \\
{[p]_{B'}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{E}^3} \arrow[u, "I_3"] \arrow[r, "A'"] & {[Dp]_{C'}=\begin{pmatrix}b-2c\\2c\\0\end{pmatrix}} \arrow[u, shift right, "T"']
\end{tikzcd}$$

$p=a+bt+ct^2$, $Dp=b+2ct$

$\to T=([c_1']_C\ [c_2']_C\ [c_3']_C)$
$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A'=T^{-1}AI_3$, $TA'I_3=A$

$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&-2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A'}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{T^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A}$

Kern, Bild, Rang:

$F: X\to Y$ Lin. Abbildung

$\dim X=n$, $\dim Y=m$

Kern F: $\ker F=$ Urbild von $F=\{x\in X: Fx=0\}\subseteq X$

Lemma 5.4 $\ker F$ ist UR von X **Beweis:**

$\ker F=F^{-1}\{0\}=\{x\in X\mid Fx=0\}\subseteq X$ $F(\alpha x+\beta x')=\ldots=0$
$=\alpha F(x)+\beta F(x')=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0$
F linear $x,x'\in\ker F$

Bild $F=\operatorname{Im}F=\{Fx: x\in X\}\subseteq Y$

Lemma 5.5:

U UR v. X: Bild FU UR v Y $\Rightarrow\operatorname{Im}FU=\{Fu\mid u\in U\subseteq X\}\subseteq Y$

$W\subseteq\operatorname{Im}F$: $F^{-1}W=\{x\in X\mid Fx\in W\subseteq Y=\operatorname{Im}F\}\subseteq X$

Bsp. $A_{m\times n}$: $A:\mathbb{E}^n\to\mathbb{E}^m$, $x\mapsto Ax$ Def: $L_0=\mathcal{N}(A)$
$\ker A=\{x\in\mathbb{E}^n, Ax=0\}=L_0$ $=$ Nullraum von A

$\operatorname{Im}A=\{Ax\mid x\in\mathbb{E}^n\}=\{\bar{a}_1x_1+\ldots+\bar{a}_nx_n\mid x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{E}\}$

$=\operatorname{span}\{\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n\}=$ von Kolonnen $A=(a_1|a_2|\ldots|a_n)$ aufgespannt

Unterraum heisst = Kolonnenraum oder Wertebereich von $A=R(A)$

$Ax=b$ ist lösbar $\Leftrightarrow\exists x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{E}$ mit $\bar{a}_1x_1+\ldots\bar{a}_nx_n=b$

$\Leftrightarrow b\in\operatorname{span}\{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_n\}=$ Kolonnenraum von A

Satz 5.11 $\operatorname{im}A=R(A)$, $\ker A=\mathcal{N}(A)$

Satz 5.6 genau dann Injektiv, wenn $\ker F=\{0\}$

Beweis: $x,x'\in X$, $x\neq x'$, $x-x'\neq 0$, $\ker F=\{0\}\Rightarrow F(x-x')\neq$
$\Rightarrow F(x)\neq F(x')$, $\ker F=\{0\}\Rightarrow\underbrace{(x\neq x'\Rightarrow F(x)\neq F(x'))}_{F \text{ ist injektiv}}$

Satz 5.7

Dimensionsformel: $\dim X=\dim(\ker F)+\dim(\operatorname{Im}F)$

Def: Rang $F=\dim(\operatorname{Im}F)$ $=\dim(\ker F)+\text{Rang }F$

Korollar 5.8: äquivalent!

(i) $F: X\to Y$ injektiv $\Leftrightarrow$ Rang $F=\dim X$

(ii) $F: X\to Y$ bijektiv Isomorph $\Leftrightarrow$ Rang $F=\dim X=\dim Y$

(iii) $F: X\to Y$ bijektiv Automorph $\Leftrightarrow$ Rang $F=\dim X$ $\wedge$ $\ker F=0$

Satz 5.9: Zwei VR $\dim<\infty$ sind isomorph $\Leftrightarrow\dim X=\dim$

Beweis Kor 5.8 (i) $F: X\to Y$ injektiv nach Satz 5.6 $\Leftrightarrow$
$\ker F=\{0\}\Rightarrow\dim x=\dim(\ker F)+\dim(\operatorname{Im}F)\Leftrightarrow\dim x=\dim\operatorname{Im}F=\text{Rang }F$

(ii) F bijektiv $\Rightarrow F$ surjektiv $\Rightarrow\operatorname{Im}F=Y\to\dim\operatorname{Im}F=\dim Y$, $\text{rang }F=\dim Y$ + (i)

Isomorphismus: $X=\mathbb{R}^2$, $Y=\mathbb{P}_1=\{a+bx\}$
$\dim X=2=\dim Y\to X\cong Y$ $\binom{1}{0}\to 1$, $\binom{0}{1}\to x$

Matrizen als lin. Abb. $A:\mathbb{E}^n\to\mathbb{E}^m$, $A(\bar{a}_1|\ldots|\bar{a}_n)$

$\ker A=\mathcal{N}(A)=L_0=\{x\mid Ax=0\}$

$\operatorname{Im}A=\operatorname{span}\{\bar{a}_1,\ldots\bar{a}_n\}=R(A)=$ Kolonnenraum A

dim Formel $\Rightarrow n=\dim\mathbb{E}^n=\dim(\ker A)+\dim(\operatorname{Im}A)$
$=\dim(\mathcal{N}(A))+\dim(R(A))$

A mittels Gauss $\to R$ $\begin{pmatrix}r_{11}&&\times\\0&\ddots&\\0&\cdots&0\end{pmatrix}$ $n-r$ lösungsvektoren

Rang $A=\#$Pivots

$Ax=0$ mit $\bar{x}_1=\begin{pmatrix}x\\x\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\bar{x}_2=\begin{pmatrix}x\\x\\0\\1\end{pmatrix}$ ...

$\hookrightarrow\bar{x}_1\ldots\bar{x}_{n-r}$ lin unabhängig $\sum_{j=1}^{n-r}\alpha_j\bar{x}_j=0\Rightarrow\alpha_j=0$

$\hookrightarrow\ker A=\operatorname{span}\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{n-r}\}$
$\Rightarrow\dim(\ker A)=n-r$

Satz 5.12 $r=$ Rang A, $L_0=\{x\mid Ax=0\}\to$
$\dim L_0=\dim\mathcal{N}(A)=n-r$

$\Rightarrow\dim(\operatorname{Im}A)=n-(n-r)=r$

Satz 5.13: Der Rang einer $m \times n$ Matrix:
(i) # Pivots bei Reduktion auf ZSF
(ii) Rang $A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ definiert als $\dim(\operatorname{Im} A)$
(iii) dimension des Kolonnenraums, # linear unabhängiger Kolonnen $\in \mathbb{E}^m$
(iv) dimension des Zeilenraums, # linear unabhängiger Zeilen $\in \mathbb{E}^n$

$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} a_1 & - \\ \vdots & \\ a_m & - \end{pmatrix}$ Kolonnenraum $= \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$
Zeilenraum $= \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_m\}$

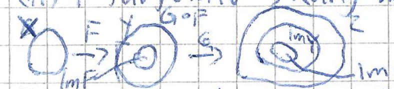
Korollar 5.14: Rang A^T = Rang A^H = Rang A §5.13 (iii)&(iv)
$\dim$ Zeilenraum$(R) = r = \dim$ Zeilenraum(A), $\operatorname{span}(r_1, \dots, r_m) = \operatorname{span}(a_1, \dots)$
Basis v. $\operatorname{Im} A = R(A) = \operatorname{span}\{\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n\}$
$\operatorname{Im} A \neq \operatorname{Im} R$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\operatorname{span}\{\binom{1}{2}\binom{2}{4}\} = \operatorname{span}\{\binom{1}{2}\} \neq \operatorname{span}\{\binom{1}{0}\}$, $\dim 1 = \dim 1$
Basis $\operatorname{Im} A = \{\vec{a}_{n_1}, \dots, \vec{a}_{n_r}\}$ wobei $\vec{a}_{n_i}$ die Pivot kolonnen sind

Satz 5.15: $\operatorname{Im}(A) = R(A) = R(\bar{A}) = \operatorname{span}\{a_{n_1}, \dots, a_{n_r}\}$

Satz 5.18: Für quadratisch äquivalent: $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$
(i) A ist invertierbar (ii) A ist regulär (iii) Rang $A = n$
(iv) die n kolonnen und (v) n Zeilen vektoren sind lin. unabhängig
(vi) $\operatorname{Im} A = R(A) = \mathbb{E}^n$ (vii) $\ker A = N(A) = \{0\}$
(viii) lineare Abbildung $A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ ist Automorphismus
(ix) A ist Transformationsmatrix einer Koordinaten-transformation in $\mathbb{E}^n$

Satz 5.19: x_0 eine Lösung $Ax = b$ und L_0 = Lösungsraum des H. GS $Ax = 0$, dann $L_b = \{x \mid Ax = b\} = L_b = x_0 + L_0$

Korollar 5.10: $F: X \to Y$, $G: Y \to Z$ lineare Abbildungen
(i) Rang $G \circ F \leq \min\{\text{Rang } F, \text{Rang } G\}$
(ii) G injektiv $\Rightarrow$ Rang $G \circ F$ = Rang F
(iii) F surjektiv $\Rightarrow$ Rang $G \circ F$ = Rang G



Beweis:
(i) Rang $G \circ F = \dim \operatorname{Im} G \circ F = \dim \operatorname{Im} G|_{\operatorname{Im} F}$
$\boxed{*}$ $\underbrace{\dim \operatorname{Im} F}_{\text{Rang } F} = \underbrace{\dim \ker G|_{\operatorname{Im} F}}_{\geq 0} + \underbrace{\dim \operatorname{im} G|_{\operatorname{Im} F}}_{\text{Rang } G \circ F}$
$\Rightarrow$ Rang $F \geq$ Rang $G \circ F$
$\Rightarrow$ Rang $G \circ F = \dim \operatorname{Im} G \circ F \leq \dim \operatorname{im} G$ = Rang G
(ii) z.z: G inj $\Rightarrow$ Rang $G \circ F$ = Rang F:
G inj $\Rightarrow \ker G = \{0\} \Rightarrow \dim \ker G = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} G|_{\operatorname{Im} F} = 0$
$\boxed{*}$ $\dim \operatorname{Im} F = \dots \Rightarrow$ Rang F = Rang $G \circ F$
(iii) z.z. F surj $\Rightarrow$ Rang $G \circ F$ = Rang G:
F surj $\Rightarrow \operatorname{im} F = Y$, $G|_{\operatorname{Im} F} = G|_Y = G$,
$\underbrace{\operatorname{im} G \circ F}_{\text{Rang } G \circ F} = \operatorname{Im} G|_{\operatorname{Im} F} = \underbrace{\operatorname{Im} G}_{\text{Rang } G}$

~~Korollar 5.10: $F: X \to Y$~~, **Satz 5.16:** $A_{m \times n}$, $B_{p \times m}$ aus $\mathbb{E}$
(i) Rang $BA \leq \min\{\text{Rang } B, \text{Rang } A\}$
(ii) Rang $B = m$ $(\leq p) \Rightarrow$ Rang BA = Rang A
(iii) Rang $A = m \leq n \Rightarrow$ Rang BA = Rang B

5. Vektorräume mit Skalarprodukt.

Norm in VR V über $\mathbb{E}$ ist $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ mit:
(N1) positiv definit $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \to x = 0$
(N2) homogen $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
(N3) Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bsp. $V = \mathbb{P}_n^{[0,1]} = \{p: [0,1] \to \mathbb{R} \mid p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n\}$
$\|p\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |p(x)|$
Beweis N3) $\|p + q\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |p(t) + q(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} |p(t)| + |q(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} |p(t)| + \max_{s \in [0,1]} |q(s)| = \|p\|_\infty + \|q\|_\infty$

$\|\cdot\|_\infty = L_\infty$-Norm = Maximumsnorm

Skalarprodukt: $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{E}$, $x, y \mapsto \langle x, y \rangle$ mit Eigenschaften (S1)–(S3) von Eukl. Skalarp.
VR mit Skalarprodukt: Länge $v \in V$: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
falls $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ Orthogonaler/Euklidischer Raum
$\mathbb{E} = \mathbb{C}$ Unitärer Raum $\mathbb{E} = \mathbb{C}$

Gewichtetes Skalarprodukt:
$W = \text{diagonalm} = \{ {>0 \atop 0} {\text{falls } i=j \atop \text{sonst}} \}$
$\langle x, y \rangle = x^H W y$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = (x^H W x)^{1/2} = (\sum w_{ij} |x_j|^2)^{1/2}$

Satz: $\dim V < \infty$ Es kann immer ein Skalarp definiert
Sei $\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ eine Basis. $x = \sum \alpha_j b_j$
Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum \bar{\alpha}_j \beta_j$, $y = \sum \beta_j b_j$

Satz 6.1: Cauchy-Schwarz Ungleichung:
$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ $\quad (\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle})$
Beweis: Satz 2.11

Orthogonal Basen:

* Orthogonale Vektoren $\neq 0$ sind lin. unabhängig
$\to \exists$ orthogonale Basen
$\to$ Kord. bzgl. Orthogonalen Basen leicht zu berechnen
* Aus Menge unabhängiger Vektoren kann man Menge orthogonaler Vektoren gewinnen.

Orthogonale Vektoren unabhängig: $\sum \gamma_j x_j = 0$
$\langle x_k, \sum_{j \neq k} \gamma_j x_j \rangle = 0 \Rightarrow \sum \gamma_j \langle x_k, x_j \rangle = 0 \Rightarrow \gamma_k \underbrace{\langle x_k, x_k \rangle}_{(S3)\, \neq 0} = 0$
$\Rightarrow \gamma_k = 0$

Orthonormal:

Orthogonale Basis: $\langle b_k, b_l \rangle = 0$
Orthonormale Basis: $\langle b_k, b_k \rangle = 1 = \delta_{kl}$ $\begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Aus Orthogonal $\to$ Orthonormal:
$\tilde{b}_j = b_j / \|b_j\| \to \langle \tilde{b}_k, \tilde{b}_l \rangle = \delta_{kl}$

Satz 6.4: in Orthonormalbasis:
$x = \sum \langle b_k, x \rangle b_k \to \xi_k = \langle b_k, x \rangle$
$\langle b_j, x \rangle = \langle b_j, \sum \xi_k b_k \rangle \underset{(S1)}{=} \sum \xi_k \underbrace{\langle b_j, b_k \rangle}_{\delta_{kj}} = \xi_j \cdot 1 = \xi_j$

Satz 6.5: Parsevalsche Formel
$\{b_1, \dots, b_n\}$ Orthonormalbasis $\xi_k = \langle b_k, x \rangle$, $\eta_k = \langle b_k, y \rangle$
$\|x\| = \|\xi\|$, $\measuredangle(x, y) = \measuredangle(\xi, \eta)$ $x \perp y \Leftrightarrow \xi \perp \eta$
Beweis: $\langle x, y \rangle_V = \langle \sum \xi_k b_k, \sum \eta_l b_l \rangle = \sum \bar{\xi}_k \sum \eta_l \underbrace{\langle b_k, b_l \rangle}_{\delta_{kl}}$
$= \sum \bar{\xi}_k \eta_k = \xi^H \eta = \langle \xi, \eta \rangle$

Gibt es immer Orthonormalbasis? Ja!
$\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq V$ linear unabhängig.
$b_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|}$
$\tilde{b}_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k \rangle b_j$
$b_k = \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|}$

Algo 6.1: Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

Satz 6.1: nach k Schritten: $\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_k\} = \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_k\}$, ist $\{a_1, \dots, a_m\}$ basis von V so ist $\{b_1, \dots, b_m\}$ Orthonormalbasis von V.
Beweis: induktion: $k = 1 \to \checkmark$ "leere Aussage"
$\langle b_l, \tilde{b}_k \rangle = 0 = \langle b_l, \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|} \rangle = \frac{1}{\|\tilde{b}_k\|} \langle b_l, \tilde{b}_k \rangle \Rightarrow$
$\frac{1}{\|\tilde{b}_k\|} = f \circ \circ = f \Rightarrow f \langle b_l, a_k \dots \rangle = f(\langle b_l, a_k \rangle - \langle b_l, a_k \rangle) = 0$

dann normieren $\frac{x}{\|x\|}$

$\to$ Mittels Gram-Schmidt, kann man lin. unabhängige Vektoren orthogonalisieren.
$\Rightarrow$ **Kor 6.8.** $\dim V < \infty \to$ es gibt Orthonormalbasis

$V = \mathbb{E}^n$, $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$, $x \in V$ **Satz 6.9:**
$\hookrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x$ ist orthogonal zu allen Zeilen von A $\Leftrightarrow x$ ist orthogonal zu allen Kolonnen von A^H
$\langle a_i, x \rangle = 0 \Leftrightarrow a_i \perp x$
$\mathbb{E} = \mathbb{C}$: $x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \perp R(A^H) \Leftrightarrow x \in (R(A^H))^\perp$

Basiswechsel in Orthonormalbasen.

$\{b_1, \dots b_n\}$ "alte" $\{b_1' \dots b_n'\}$ neue

$b_k' = \sum \tau_{jk} b_j$, $\delta_{kk} = \langle b_k', b_l' \rangle = \langle \sum \tau_{jk} b_j, \sum \tau_{ml} b_m \rangle$

$= \sum \overline{\tau_{jk}} \tau_{jl} = \delta_{kl} = (T^H T)_{kl} \Rightarrow T^H T = I_{n\times n}$

Satz 6.10: Transformationsmatrix unitär ($\mathbb{E}=\mathbb{C}$), bzw. orthogonal ($\mathbb{E}=\mathbb{R}$)

↳ $T^{-1} = T^H$

Siehe Basenwechsel/Transformation.

↳ $S = T \rightarrow B = T^H A T$, $A = T B T^H$

Unterschied $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$: $\langle x, F(x) \rangle = 0 \rightarrow F = 0$

in $\mathbb{R}$: nein $F\left(\binom{x_1}{x_2}\right) = \binom{-x_2}{x_1} \rightarrow -x_1x_2 + x_1x_2 = 0$

(drehung um $90°$)

Über $\mathbb{C}$ stimmt es. $\langle x+y, F(x+y) \rangle \Rightarrow$

$0 = \langle x, F(y) \rangle + \langle y, F(x) \rangle \rightarrow y = iv$

$0 = \langle x, F(iv) \rangle + \langle iv, F(x) \rangle = i\langle x, F(v) \rangle + \bar{i} \langle v, F(x) \rangle$

$\rightarrow F = 0$

Unitäre/Orthogonale Abbildung behalten Skalarprod (Längen/Winkel)

unitär $AA^H = I$ über $\mathbb{C}$

orthogonal $AA^T = I$ über $\mathbb{R}$

Satz 6.13 für $F: X \rightarrow Y$ unitär/orthogonal

(i) $\|Fx\|_Y = \|x\|_X$ längentreu

(ii) $x \perp y \Rightarrow Fx \perp Fy$ winkeltreu

(iii) $\ker F = \{0\}$ F ist injektiv

Falls $\dim X = \dim Y < \infty$, dann:

(iv) F ist isomorph

(v) $\{b_1, \dots, b_n\}$ orthonormalbasis v. $X \rightarrow \{Fb_1, \dots Fb_n\}$ von Y

(vi) F^{-1} ist unitär bzw. orthogonal.

(vii) A bzg. orthonormalbasen X und Y ist unitär bzw. orthogonal.

(iii) $F_x = 0 \overset{(S3)}{\Leftrightarrow} \langle F(x), F(x) \rangle_Y = 0 \overset{F \text{ unitär}}{\Leftrightarrow} \langle x, x \rangle_X = 0 \overset{(S3)}{\Leftrightarrow}$

$x = 0 \Rightarrow \ker F = \{0\}$

Satz 6.13

$A = \underbrace{\underbrace{K_Y}_{\substack{\text{unitär} \\ \text{L 6.15}}} \circ F \circ \underbrace{K_X^{-1}}_{\substack{\text{unitär} \\ \text{Satz 6.13 (vi)}}}}_{\text{Unitär (Lemma 6.14)}} \Rightarrow$ Lemma 6.16: A ist unitär.

Konditionszahl:

$K(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ für reguläre $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$

$K(A) := \infty$ für singuläre $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$

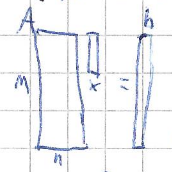
Indizierte Operator Norm: $F \mapsto \|F\| := \sup \frac{\|F(x)\|_Y}{\|x\|_X}$

$\|F\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|F(x)\|_Y$

$\|A\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\|$

6. Kleinste Quadrate:

$Ax = b$ ein LGS mit $m > n$



in der Regel nicht lösbar.

wir suchen x, s.d. $\|Ax - b\|_2^2$ minimal

$\arg\min_x \|Ax - b\|^2$

$\|x\|^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$

Minimal, wenn $(Ax - b) \perp R(A)$ d.h.

$(Ax - b) \in R(A)^\perp = N(A^H) \Rightarrow A^H(Ax - b) = 0 \Rightarrow$

$A^H A x = A^H b$

$(Ax - b) \perp R(A) = \operatorname{span}\{a_1, \dots a_n\} \Rightarrow (Ax - b) \perp a_j$

$\Rightarrow \langle Ax - b, a_1 \rangle = 0 \rightarrow a_1^H \cdot (Ax - b) = 0$

$\vdots$

$\langle Ax - b, a_n \rangle = 0 \rightarrow a_n^H \cdot (Ax - b) = 0$

$A^H A x = A^H b$: Normalgleichung

↳ Lösung, falls $A^H A$ regulär $\in \mathbb{E}^{n\times n}$

Lemma: $A^H A$ regulär $\Leftrightarrow$ Rang $A = n$

($\Leftarrow$) Rang $A = n$, $A^H A x = 0 \quad | \cdot x^H$

$\Rightarrow x^H A^H A x = 0 \Rightarrow (Ax)^H \cdot (Ax) = 0 \Rightarrow \langle Ax, Ax \rangle = 0$

$\overset{(S3)}{\Leftrightarrow} Ax = 0$ Aber Rang $A = n \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow A^H A$ ist regulär

($\Rightarrow$) $Ax = 0 \rightarrow A^H A x = 0 \rightarrow A^H A$ regulär $\rightarrow x = 0$

$\rightarrow$ spalten v. A lin. unabhängig Rang $A = n$

$x = (A^H A)^{-1} A^H b$

↳ $(A^H A)^{-1} A^H$: pseudo inverse v. A

$A \in \mathbb{E}^{m\times n}$, Rang $A = n$, $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H \in \mathbb{E}^{n\times m}$

$A^+ A = I_{n\times n}$, $AA^+ \neq I$

(falls Rang $A < n$, A^+ mittels SVD)

Beweis kleinste Quadrate:

$x = \arg\min_{\tilde{x}} \|A\tilde{x} - b\|_2^2 \Leftrightarrow (Ax - b) \perp R(A)$

x': $(Ax' - b) \not\perp R(A)$

x : $(Ax - b) \perp R(A)$

$\langle Ax - b, Ax' - Ax \rangle = \langle \underbrace{Ax - b}_{\perp R(A)}, \underbrace{A(x' - x)}_{R(A)} \rangle = 0$

Satz v. Pythagoras:

$\|(\cancel{Ax} - b) + (Ax' - \cancel{Ax})\|^2 = \|Ax - b\|^2 + \|Ax' - Ax\|^2$

$\|Ax' - b\|^2 = \|Ax - b\|^2 + \|Ax' - Ax\|^2$

$\Rightarrow \|Ax - b\|^2 \leq \|Ax' - b\|^2 \Rightarrow x = \arg\min_{\tilde{x}} \|A\tilde{x} - b\|^2$

z.B. $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$

$a_0, a_1, \dots$ finden $\sum^N |f(t_j) - f_j|^2 \rightarrow \min$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & t_N & t_N^2 & \dots & t_N^n \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

$\|Ua - f\|^2 \rightarrow \min$

$a = (U^T U)^{-1} U^T f$

QR-Zerlegung:

$A \in \mathbb{E}^{m\times n}$ $A = (a_1\ a_2 \dots a_n)$

$m \geq n$ und $\{a_j\}$ lin unabhängig. Gram-Schmidt:

$q_1 = a_1 / \|a_1\|$

$\tilde{q}_k := a_k - \sum^{k-1} q_j \langle q_j, a_k \rangle$

$q_k = \tilde{q}_k / \|\tilde{q}_k\|$

Isolieren a_k:

$a_1 = q_1 \|a_1\|$

$a_k = \tilde{q}_k + \sum^{k-1} q_j \langle q_j, a_k \rangle = q_k \|\tilde{q}_k\| + \sum^{k-1} q_j q_j^H a_k$

$r_{11} = \|a_1\|$ $r_{jk} = q_j^H a_k$ $j = 1, \dots, k-1$ $r_{kk} = \|\tilde{q}_k\|$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix} = R \quad \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{pmatrix} = Q \quad A = QR$$

$\{q_1 \dots q_n\}$ zu orthonormaler Basis von $\mathbb{E}^m$ ergänzen: $\{q_1 \dots q_n, q_{n+1} \dots q_m\}$

$\tilde{Q} = (q_1 \cdots q_m)$ ist unitär, $\tilde{Q} \in \mathbb{E}^{m \times m}$

$Q^{\perp} := (q_{n+1} \cdots q_m) \Rightarrow A = QR = (Q\ Q^{\perp}) \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}$

$= \tilde{Q} \cdot \tilde{R}$, $\tilde{R}$ ist ergänzung von R mit $m-n$ Zeilen 0:

$$m \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_{n} = \tilde{R}, \quad \tilde{Q} = {}_m\begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_m \\ | & & | \end{pmatrix}_{m}$$

$A = \tilde{Q}\tilde{R}$, Rang $A = n$, $A^{m \times n}$, $\tilde{Q} \in \mathbb{E}^{m \times m}$ unitär
$\tilde{R} \in \mathbb{E}^{m \times n}$

↳ **Kleinste Quadrate:**
$Ax = b$, $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$, Rang $A = n$, $b \in \mathbb{E}^n$, $b \notin R(A)$
b lin. unabh. $\{a_1, \dots, a_n\}$ (Spalten v. A)

$\Rightarrow$ Gram-Schmidt: in n-Schritten: $A = QR$
Im letzten Schritt: $\tilde{q}_{n+1} = b - \sum q_j (q_j^H b)$
$= b - QQ^H b$

$\tilde{q}_{n+1} \perp R(A)$ da $\tilde{q}_{n+1} \perp \operatorname{span}\{q_1, \dots, q_n\}$
$= \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}$

$\sum^n q_j (q_j^H b) = Ax$ für irgend ein $x \in \mathbb{E}^n$

Rang $A = n \rightarrow x$ ist eindeutig bestimmt

$R(A) \perp \tilde{q}_{n+1} = b - Ax = b - QQ^H b$
x muss Lösung $\underset{x}{\operatorname{argmin}} \|Ax - b\|_2^2$ sein!

$\Rightarrow \cancel{b} - Ax = \cancel{b} - QQ^H b \Rightarrow Ax = QQ^H b$, aber
$QR = A \Rightarrow QRx = QQ^H b$ | mult. Q^H v. links
$Q^H QRx = Q^H QQ^H b \Rightarrow Rx = Q^H b$

x kann mittels rückwärts einsetzen bestimmen werden und es gilt
$(Ax - b) \perp R(A) \rightarrow x =$ Lösung $\underset{x}{\operatorname{argmin}} \|Ax - b\|^2$!

$K(R) = K(A)$ bzgl. $\|\cdot\|_2$

7. Determinante:

det: $\mathbb{E}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{E}$
$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ regulär.

$\det A = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sign}(p)\, a_{1,p(1)}\, a_{2,p(2)} \cdots$

bsp. 1) $\det(a_{11}) = a_{11}$
2) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$
$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

Satz 8.12: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \det A[k,j]$ ← nach k. Zeile
$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \cdot \det[j,k]$ ← nach k. Kolonne

$A[k,j] = (n-1) \times (n-1)$ Matrix, ohne Zeile k und Spalte j von A

Def: $k_{kj} = (-1)^{k+j} \det A[k,j] =$ Kofaktor $k_{k,j}$ von a_{kj}

$A = R$: $\det A = r_{11} \begin{vmatrix} r_{22} & \cdots & x \\ 0 & \ddots & r_{nn} \end{vmatrix} = \dots \Rightarrow \det A = \prod_{k=1}^{n} r_{kk}$
gleich für $L = A$

Satz 8.3: (ii) Werden Zeilen vertauscht, ändert Vorzeichen von $\det A$! $\det I = 1$ (iii)
(i) det ist linear in Zeile v. A.

Satz 8.4: iv) hat A Zeilen mit $0 \rightarrow \det A = 0$
v) $\det(\gamma A) = \gamma^n \det A$
vi) Hat A 2 gleiche Zeilen $\rightarrow \det A = 0$
vii) Addition von Zeilen von A ändern nichts an $\det A$

Satz 8.7: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
Beweis: wenn $\det B = 0 \rightarrow$ Rang $B < n \rightarrow$ Rang $AB < n$
$\Rightarrow AB$ singulär $\rightarrow \det AB = 0 = \det A \cdot \det B = \det A \cdot 0$
Falls $\det B \neq 0 \rightarrow f(A) = \det AB / \det(B)$, $f(A) = \det A$
$\Rightarrow \det A = \det AB / \det B \Rightarrow \det A \cdot \det B = \det AB$

Satz 8.9 $\det A^T = \det A$, $\det A^H = \overline{\det A}$

8. Eigenwerte & Eigenvektoren:

$F: V \rightarrow V$, V ist VR, $\dim V < \infty$
$x \in V \rightarrow x \rightarrow \boxed{F} \rightarrow \lambda x$ F skaliert x nur.
$\lambda \in \mathbb{E}$ heisst Eigenwert (EW) von F falls es $v \in V$ gibt $v \neq 0$ s.d. $F(v) = \lambda v$
$\rightarrow v$ heisst Eigenvektor (EV) von F der zu EW λ gehört.
Alle EV von λ + Nullvektor = Unterraum von V: $E_\lambda := \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$
↑ E_λ ist Eigenraum zu λ

Def. Menge aller EW v. F: Spektrum von F:

Insbesondere für quadratisch $A: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$
$\xi \in \mathbb{E}^n$ ist ein EV zum EW $\lambda \in \mathbb{E}$ v. Matrix A, falls $\xi \neq 0$ und $A\xi = \lambda\xi$

Lemma 9.1: λ ist EV von $F \Leftrightarrow \lambda$ ist EW v. A
x ist EV v. $F \Leftrightarrow \xi = K_V(x)$ ist EV von A

A ist:
$$\begin{tikzcd} \underset{x \in V}{V} \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "K_V"'] & \underset{F(x) \in V}{V} \arrow[d, shift right, "K_V"'] \\ \underset{\xi = K_V(x)}{\mathbb{E}^n} \arrow[u, shift right, "K_V^{-1}"'] \arrow[r, "A"] & \underset{\eta = A(\xi)}{\mathbb{E}^n} \arrow[u, shift right, "K_V^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$A = K_V \circ F \circ K_V^{-1}$

Sei $x \in V$ ein EV mit EW λ von F dann, ist Koordinatenvektor $\xi = K_V(x)$ ein EV mit EW λ: d.h. $A\xi = \lambda\xi$

$A\xi = (K_V \circ F \circ K_V^{-1})\xi = K_V F K_V^{-1} K_V(x) = K_V F(x) =$
$= K_V(\lambda x) = \lambda K_V(x) = \lambda\xi$

z.B. $v = \binom{1}{1}$ $Av = A\binom{1}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\binom{1}{1} = \binom{3}{3} = 3 \cdot \binom{1}{1} \to v = \binom{1}{1}$
$Ae_1 = A\binom{1}{0} = \binom{2}{1}$ $Ae_2 = A\binom{0}{1} = \binom{1}{2}$ $\lambda = 3$

Unterraum E_λ

$\dim E_\lambda \geq 1$ per Definition min. 1 EV

$0 \neq v$ ist EV von $F \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{E}$ s.d. $F_v = \lambda v$
$\Leftrightarrow F_v - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (F - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(F - \lambda I)$

Lemma 9.2: $E_\lambda = \{v \in V : Fv = \lambda v\} = \ker(F - \lambda I)$

Def: die geom. vielfachheit eines EW λ ist gleich $\dim E_\lambda$

Bmk: $\lambda = 0$ ist EW v. $A \Leftrightarrow A$ ist singulär

Bsp. I hat EW $\lambda = 1$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\binom{1}{0} = 1 \cdot \binom{1}{0}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\binom{0}{1} = 1 \cdot \binom{0}{1}$

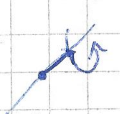
$\lambda = 1$ ist EW v. $V = I_2$, $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ sind EV zu $\lambda = 1$
$\dim E_1 = 2 =$ geom. Vielfalt.

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda = 1$ ist EW

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\binom{1}{0} = 1 \cdot \binom{1}{0}$, $\binom{1}{0}$ ist EV zu $\lambda = 1$
$\dim E_1 = 1 =$ geom Vielfalt

Bsp. $Ae_1 = \alpha_1 e_1$, $Ae_2 = \alpha_2 e_2$ $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$
so ist e_k ein E.V. von A mit E.W α_k

Bsp. Rotation in $\mathbb{R}^3$ um Winkel φ um Gerade durch Ursprung aufgespannt durch $v \in \mathbb{R}^3$
↳ Achse bleibt, also hat Rotation EW=1 und v ist EV.



Generell: λ ist EW v. $F \Rightarrow E_\lambda$ ist invariant unter F d.h. $F(E_\lambda) = E_\lambda$

$0 \neq v$ ist EW von $F \Leftrightarrow (F - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(F - \lambda I)$

Korollar 9.3 λ ist genau dann EW von $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ wenn $A - \lambda I$ singulär ist.

Die geometrische Vielfachheit von λ ist $\dim E_\lambda$
$= \dim(\ker(A - \lambda I)) = n - \text{Rang}(A - \lambda I)$
λ ist EW von $A \Leftrightarrow A - \lambda I$ ist singulär $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$
$= (\lambda - 3)(\lambda - 1) = \chi_A(\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ sind EW

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$
$= (2 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 4) = \chi_A(\lambda)$
↳ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$ sind EW. v. A

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to E_{\lambda_1} = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$= \left\{\binom{x_1}{x_2} \middle| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{0}\right\} = \{x\binom{1}{1}\} = \text{span}\{\binom{1}{1}\}$
$\dim E_{\lambda_1} = 1$

$\lambda_2 = 1$: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda_2} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$= \left\{\binom{x_1}{x_2} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{0}\right\} = \{x\binom{1}{-1} \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{\binom{1}{-1}\}$
$\dim E_{\lambda_2} = 1$

Def: Polynom $\det(A - \lambda I) = \chi_A(\lambda)$ heisst charakteristisches Polynom von A und $\chi_A(\lambda) = 0$ ist die charakteristische Gleichung.

Satz 9.5 $\lambda \in \mathbb{E}$ ist EW von $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$
$\Leftrightarrow \lambda$ ist Nullstelle von $\chi_A(\lambda) \Leftrightarrow \lambda$ ist Lösung der char. Gleichung.
↳ Ein Polynom grad n hat genau n Nullstellen über $\mathbb{C}$

$\to \chi_A(\lambda)$ ist Polynom v. Grad n, $A^{n \times n}$

Spur: Summe der diagonalelemente.

Lemma 9.4
$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (\text{spur } A)(-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \det A$

$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \underset{\det(A)}{b_0}$

$b_0 = \chi_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$

Alg. Vielfachheit: Vielfachheit von λ als Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$
Bsp. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
$\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)^2 \to 3$ ist EW mit alg. Vielfalt 2 (da $(3 - \lambda)^2$ eine doppelte Nullstelle.
↳ gleich für B
$E_3^A = \text{span}\{\binom{1}{0}\} \to$ geom. Vielfalt: $\dim E_3^A = 1$
$E_3^B = \text{span}\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\} \to$ geom Vielfalt: $\dim E_3^B = 2$

Satz 9.13 Für jedes $\lambda =$ EW: geom Vielfachheit $\leq$ alg. Vielfachheit.

Linear: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$
Satz 9.11: $v_1 = \binom{1}{1}$, $v_2 = \binom{1}{-1}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \to v_1$ und v_2 lin. unabhängig.

Kor 9.12. Falls $F: V \to V$, $\dim V = n$, n verschiedene EW $\to$ Es gibt eine Eigenbasis.

Sei A Matrix mit Eigenbasis. $\lambda_1 \dots \lambda_n$ (nicht unbedingt verschieden) dann $Av_j = \lambda v_j$

$A \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{= W} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{= W}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

W nicht singulär, kolonnen lin. unabhängig, W invertierbar $\Rightarrow W^{-1}AW = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A = W \Lambda W^{-1}$ $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
↓
Spektralzerlegung / Eigenwertzerlegung

$A = W \Lambda W^{-1}$ Wir sagen A ist diagonalisierbar durch W. Auch umgekehrt! falls $\exists W \in \mathbb{E}^{n \times n}$, W regulär, dass W die Matrix A diagonalisiert. $A = W \Lambda W^{-1}$: Diagonalelemente von Λ sind EW, von A und Spalten von W sind die resp. EV

$A = W \Lambda W^{-1}$ Spektral/Eigenwertszerlegung, A skaliert Achsen $v_1, \dots, v_n$

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $W = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{W} \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{W^{-1}}$$

Satz 9.14: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ geom. viel. jedes EW v. A ist gleich seiner alg. viel.

~~Beweis 9.13~~ $V^{-1} A V = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 \ddots \lambda_0 & M \\ \hline 0 & T \end{array} \right) =: C$

$$\chi_C(\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 - \lambda \ddots \lambda_0 - \lambda & M \\ \hline & T - \lambda I_{n-r} \end{array} \right)$$

Satz 9.7. Ähnliche Polynome A und C: $C = T^{-1} A T$ haben selbes char. Polynom, gleiche det, gleiche Spur und gleiche EW

$\chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = \det(T^{-1} A T - \lambda T^{-1} I T) = \det(T^{-1}(A - \lambda I) T) = \det(T^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(T)$
$= \frac{1}{\det T} \cdot \chi_A(\lambda) \cdot \det T = \chi_A(\lambda)$

$\to$ Koeff. v. $\chi_C(\lambda)$ und $\chi_A(\lambda)$ sind gleich!
zu λ^{n-1}: $(-1)^{n-1}$ Spur $C = (-1)^{n-1}$ Spur $A \Rightarrow$ Spur A = Spur C
zu λ^0: det C = det A!
Nullstellen χ_A = Nullstellen $\chi_B \to$ Gleiche EW.

Satz 9.15, Kor 9.16 (für $\mathbb{R}$) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Hermitesch $A^H = A$

(i) Alle EW $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sind reell
(ii) EV von verschiedenen EW sind paarweise orthogonal in $\mathbb{C}^n$
(iii) Es gibt eine orthogonale Basis in $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren $u_1 \dots u_n$ von A
(iv) Für Unitäre (Orthogonale in $\mathbb{R}$) Matrix U gilt:
$U = (u_1 \dots u_n)$
$U^H A U = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

Beweis: (i) und (ii): $\langle u, Av \rangle = u^H A v \overset{A^H = A}{=} (u^H A^H) v =$
$= \langle Au, v \rangle$, nehmen wir an $Au = \lambda u$, $Av = \mu v$
$u, v \neq 0$ EV v. A.
$\langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle$
$\langle u, \mu v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle$
$\mu \langle u, v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle \Rightarrow (\mu - \bar{\lambda}) \langle u, v \rangle = 0$
Wenn $u = v \to \lambda = \mu \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ (i)
$\underset{\neq 0}{(\mu - \lambda)} \to \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$ (ii)

Spektralnorm:
$K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ $\quad \|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$

Defn. $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ A Hermitesch ($A^H = A$) heisst positiv definit, falls $\forall x \in \mathbb{E}^n$, $x \neq 0$ gilt $x^H A x > 0$, ~~semi-def~~ positiv semi-definit, wenn $x^H A x \geq 0$

Satz: A positiv definit: Alle EW v. $A > 0$
A positiv semidefinit: Alle EW v. $A \geq 0$

Satz 10.7 Spektralnorm $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$
$\|A\|_2 = \max \{ \sqrt{\lambda}$ s.d. λ EW von $A^H A \}$

Korollar: $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ Hermitesch $\Rightarrow \|A\|_2 = \max \{ |\lambda|, \lambda$ EW v. A
$A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ unitär $\Rightarrow \|A\|_2 = 1$

Beweis: (i) $A^H = A \Rightarrow A^H A = A^2 \to A = U \Lambda U^H \Rightarrow$
$A^2 = U \Lambda U^H U \Lambda U^H = U \Lambda^2 U^H = U \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \\ & \ddots \lambda_n^2 \end{pmatrix} U^H$
$\Rightarrow \|A\|_2 = \max \{ |\lambda|, \lambda$ EW von $A \}$
(ii) A unitär $\Rightarrow A^H A = I \Rightarrow \|A\|_2 = 1$ weil I nur EW 1 hat.

Satz BC und CB haben gleichen EW
~~Beweis:~~

Kor 10.10: $K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \dfrac{\max \{ \sqrt{\lambda}, \lambda \text{ EW } A^H A}{\min \{ \sqrt{\lambda}, \lambda \text{ EW } A^H A} \Rightarrow K_2(A) \geq 1$

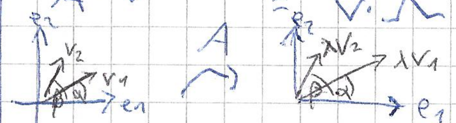
Wenn A singulär $K_2(A) = \infty$

10. Singulärwert-Zerlegung: SVD

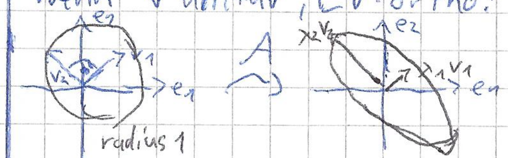
Wenn $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ diagonalisierbar, ist A Skalierung der Achsen die von EV. aufgespannt

$A \cdot (v_1 \cdots v_n) = (\lambda_1 v_1 \cdots \lambda_n v_n)$

$A \cdot V = V \cdot \Lambda$



Wenn V unitär, EV: ortho!



Skalierung & Rotation:
v_1, v_2 urbilder v. $\sigma_1 u_1$, $\sigma_2 u_2$ $\quad \|v_1\| = \|v_2\| = 1$
$v_1 \perp v_2$, $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ $\quad \sigma_1, \sigma_2 \geq 0$
aber: $v_1 \neq u_1 \lambda$, $v_2 \neq u_2 \lambda \to$ nicht nur Skalierung

$AV = U \cdot \Sigma$

$A \underbrace{(v_1 \cdots v_n)}_{\text{ortho. spalten}} = \underbrace{(u_1 \cdots u_n)}_{\text{ortho spalten}} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{pmatrix}$ $\sigma \geq 0$

Diese Zerlegung gibt es immer! generell $U \neq V$ aber U, V beide orthogonal/unitär und Σ diagonal ≥ 0

$A = U \Sigma V^H$

$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $A^H A \in \mathbb{F}^{n\times n}$

$A^H A$ ist Hermitesch und positiv semidefinit

$\Rightarrow A^H A = V \Lambda V^H$ wobei EW. ≥ 0 nehmen wir an, EW absteigend sortiert: $\exists \sigma_j \geq 0$ s.d.

$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2 > 0 = \sigma_{r+1}^2 = \dots = \sigma_n^2 = 0$

$r = \text{Rang } A^H A = \text{Rang } A$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_r^2 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$A^H A V = V \Lambda$

$$\underbrace{A^H A}_{n\times n} \Big(\underbrace{v_1 \dots v_r}_{V_r,\ n\times r}\ \underbrace{v_{r+1} \dots v_n}_{V^\perp_{n\times(n-r)}}\Big) = \Big(\underbrace{v_1 \dots v_r}_{V_r}\ \underbrace{v_{r+1} \dots v_n}_{V^\perp}\Big)\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_r^2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{n\times n}$$

Erste r EV:

$A^H A V_r = V_r \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_r^{-1} V_r^H A^H A V_r \Sigma_r^{-1} = I_{r\times r}$

$= \underbrace{(A V_r \Sigma_r^{-1})^H}_{U_r^H} \underbrace{(A V_r \Sigma_r^{-1})}_{U_r} = I_{r\times r} \rightarrow U_r^H U_r = I_r$

U_r hat othonormale Spalten

$\Rightarrow A V_r = U_r \Sigma_r$

U zu unitärer $m\times m$ ergänzen:

$U := (U_r \,\vdots\, U^\perp)$; $U^H U = I_{m\times m}$, $U^\perp = (u_{r+1} \dots u_m)$

$$\underset{m\times n}{A} \underbrace{(V_r \,\vdots\, V^\perp)}_{\substack{V \\ n\times n}} = \underbrace{(U_r \,\vdots\, U^\perp)}_{\substack{U \\ m\times m}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \Sigma_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{\substack{\Sigma \\ m\times n}}$$

$A = U \Sigma V^H \leftarrow$ SVD von A

Def $\sigma_1 \dots \sigma_n$ Diagonalelemente v. Σ:

Singulärwerte

$u_1, \dots, u_m \rightarrow$ linken Singulär vektoren

$v_1, \dots, v_m \rightarrow$ rechte "

$\{v_1, \dots, v_r\}$ ist ortho. Basis $R(A^H) = \text{Im } A^H$

$\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ " $N(A) = \ker A$

$\{u_1, \dots, u_r\}$ " $R(A) = \text{Im } A$

$\{u_{r+1}, \dots, u_n\}$ " $N(A^H) = \ker A^H$

$R(A^H) \perp N(A)$, $R(A) \perp N(A^H)$ Satz 6.9

U ist die Unitäre matrix AA^H diagonalisiert

$\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$ die nicht null EW. von AA^H

Je nach dem ob $m > n$ oder $m < n$ ist es "billiger" V_r oder U_r zu berechnen

$AA^H = U\left(\begin{array}{c|c} \Sigma_r^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)U^H$ die Spektralzerlegung von AA^H

Kor. 11.5: $\|A\|_2 = \sigma_1$, $K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$

Satz 11.6: $A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_{r_0} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} V^H$ ↳ waren zu klein.

$\|A - A_p\|_2 = \sigma_{p+1}$

SVD: $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

Want: $C = U \Sigma V^T$

$C^T C = V \Sigma^T \Sigma V^T$

$CV = U\Sigma$

$C^T C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 74 \end{pmatrix}$

$\det(C^T C - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 26-\lambda & 18 \\ 18 & 74-\lambda \end{pmatrix}$

$= \lambda^2 - 100\lambda + 1600 = (\lambda - 20)(\lambda - 80)$

$C^T C - 20 I = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 54 \end{pmatrix}$

$V_1 = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$

$C^T - 80 I = \begin{pmatrix} -54 & 18 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{10} & 2\sqrt{10} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{10} \end{pmatrix}$